## 培优课04 函数中的构造问题

### 培优点一 构造具体函数

#### 审题指导

典例1 已知（审题①等式两边同时取对数后构造函数 审题②利用导数研究其单调性，再由单调性比较大小），则,,的大小关系为.

**解题观摩**

[解析]对,,都取自然对数，得 ，…………审题①

，…………审题① 、得，设，则，所以在上单调递减，所以，

，…………审题②

又,,，所以，即.

#### 通性通法

学习和积累“构造函数比大小”，要从“结构同构”处入手，通过函数的相同结构，学习观察、归纳、总结“同构”规律，还要进一步总结“异构”规律，为后续更复杂的“构造函数”做训练.通常结构复杂的“构造函数”往往需要多次构造，并常常需要利用泰勒展开、切线放缩、帕德逼近等（详情见基础课18“拓展教材”栏目）技巧作为辅助手段.

#### 培优训练

##### 通过变形构造具体函数条件变式

1. 若，则( A ).

A. B. C. D.

[解析]由，得，即.设，则，由指数函数的性质易知在上单调递增，则，得，所以，所以.故选.

##### 由整体构造变为部分构造条件变式

2. 已知， ， ，则，，的大小关系为.

[解析]由幂、指数函数性质知，，

对于， ，等号两边取对数得 ，，

所以，，

令且，则，即单调递减，

所以，即，所以，即，所以.

##### 由构造一次变为构造两次综合变式

3. 已知,,，则,,的大小关系为.

[解析]设，，

则，

当时，，则函数单调递减，

当时，，则函数单调递增，

则当时，函数取得极小值，也为最小值，且最小值为0，

所以当时，，即.

，则，而，所以，

又，所以，

令，则，

令，则，当,时，，则函数单调递减，当,时，，则函数单调递增，所以当时，取得极小值，也为最小值，且最小值为，所以，即，则，所以.

### 培优点二 构造抽象函数

#### 审题指导

典例2 若定义在上的函数满足（审题①出现的形式,构造函 审题②由导数的正负情况判断新构造函数的单调性），且，则不等式的解集为.

**解题观摩**

[解析]，…………审题①

因为，所以，且，

.…………审题②

由得，，则，即，故原不等式的解集为.

#### 通性通法

基本规律1：对于，构造.

基本规律2：对于，构造.

基本规律3：对于，构造.

基本规律4：对于，构造.

基本规律5：对于，构造.

基本规律6：对于，构造.

基本规律7：对于，构造.

基本规律8：对于，构造.

#### 培优训练

##### 利用基本规律2进行构造综合变式

1. 已知定义在上的偶函数，其导函数为，当时，，，则不等式的解集为.

[解析]构造函数,则,

当时，，故，在上单调递增，

又为偶函数，为偶函数，所以为偶函数，在上单调递减.

,则，.

因为，所以当时，，，所以；

当时，，，所以.

综上所述，.

##### 利用基本规律6进行构造综合变式

2. 已知奇函数的定义域为，其导函数是.若当 时，，则关于的不等式的解集为.

[解析]令,，因为当 时，有，所以当 时，，所以函数在上单调递减，所以当 时，关于的不等式可化为，即，所以 ；当时， ，则关于的不等式可化为，即，因为函数为奇函数，所以，也即，所以，即，所以.

综上，原不等式的解集为.

### \*培优点三 指对同构

#### 审题指导

典例3 已知对，（审题}①对式子变形得到,构造函数审题 ②对式子变形得到,构造函数）恒成立，则正实数的最小值为.

**解题观摩**

[解析]（法一：和差型）由,，得，即，则，

，…………审题①

显然为增函数.由，得，即，则，令，则，则在上单调递增，在上单调递减，

故，故实数的最小值为.

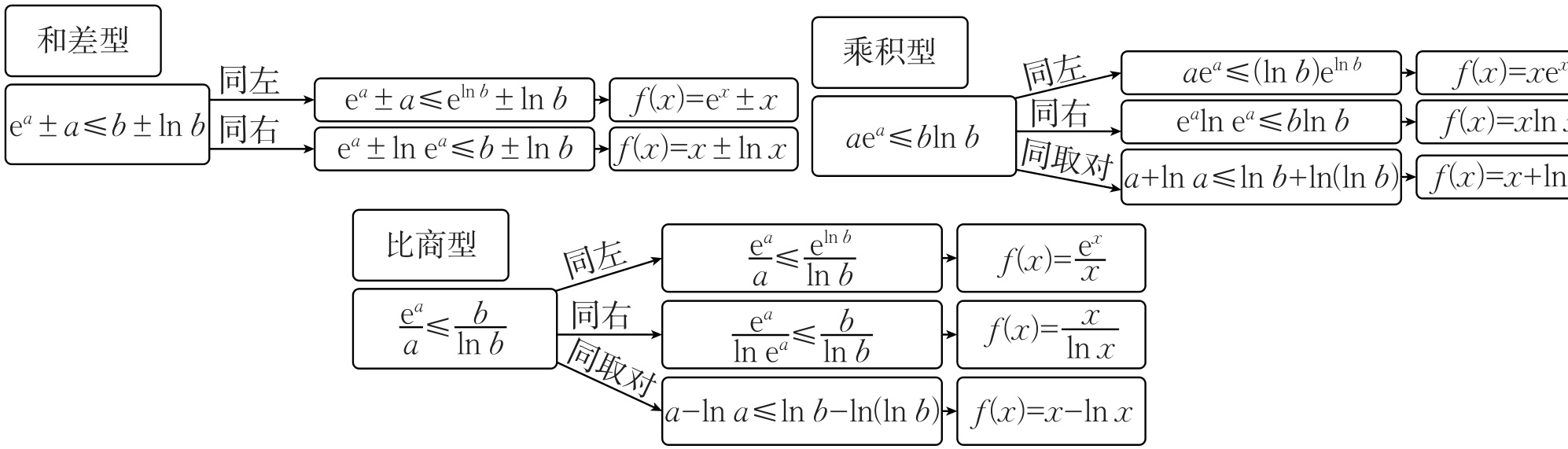
（法二：乘积型）由，得，即，

当时，总有,，显然成立，故只需考虑的情形，

，…………审题②

由，得，后同法一.

#### 通性通法



#### 培优训练

##### 朗博同构综合变式

[2022·全国甲卷节选]已知函数.若，则实数的取值范围为.

[解析]由得，，令,，则,即，

令,，则,故在区间上是增函数，故，即,所以实数的取值范围为.